Title	事前情報に基づくp個のポアソン母平均の縮小推定量とその応用 (Statistical Inference and Modelling)
Author(s)	張, 元宗; 篠崎, 信雄
Citation	数理解析研究所講究録 = RIMS Kokyuroku (2018), 2091: 65-75
Issue Date	2018-10
URL	http://hdl.handle.net/2433/251636
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録 第2091巻 2018年 65-75

事前情報に基づく p 個のポアソン母平均の縮小推定量とその応用

目白大学・社会学部　張　元宗 *　慶應義塾大学・理工学部　篠崎　信雄
*Chang Yuan-Tsung, Department of Social Information, Mejiro University
Shinozaki Nobuo, Faculty of Science and Technology, Keio University

§1. はじめに

$X_1, \cdots, X_p$ を互いに独立にポアソン分布 $P_o(\lambda_i), i=1,\cdots,p(\geq 2)$, にしたがう確率変数とする。標準化 2 乗誤差損失関数（normalized squared error loss）

$$L(\hat{\lambda}, \lambda)=\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^{-1}(\hat{\lambda}_i-\lambda_i)^2 \tag{1.1}$$

を基準としたとき、母平均 $\lambda=(\lambda_{\mathbf{1}},\cdots,\lambda_{\mathbf{p}})'$ の同時推定問題に対して、Clevension & Zidek (1975) は原点に縮小する推定量

$$\hat{\lambda}_i^{CZ}(\mathbf{X})=\left(1-\frac{\varphi(Z)}{Z+p-1}\right)X_i, \qquad i=1,\ldots,p,$$

を提案した。ここで、$Z=\sum_{i=1}^{p} X_i$ である。$\varphi(Z)$ が非減少関数で、$0 \leq \varphi(Z) \leq 2(p-1)$ を満たすならばこの推定量が不偏推定量 $\mathbf{X}=(X_1,\cdots,X_p)'$ を改良することを示した。しかし、いくつかの λ_i が大きな値である場合、原点に縮小する推定量は大きな改良を与えるとは言えない。Ghosh, Hwang & Tsui(1983) および Tsui (1984,1986) は、指定した非負の整数点あるいは順序統計量に縮小する推定量を提案した。しかし、両論文で提案

* 〒161-8539 東京都新宿区中落合４－３１－１
各定理の証明について、参考文献 [6] または下記の URL を参照されたい。
http://www.tandfonline.com/eprint/qGIvwAG8tCf7kWhHidWE/full

された推定量は複雑で、改善の余地がある。ここで、事前情報に基づくポアソン母平均の縮小推定理論を統合し、ある正な値また観測値の最小値に縮小するような推定量のクラスを再構築する。さらに、ポアソン母平均に simple tree order 制約がある場合に、isotonic regression 推定量を改良する方法を提案する。また、multiplicative Poisson models での母平均の同時推定問題も取り上げ、順序統計量への縮小推定量を提案する。

§2. 事前情報に基づく縮小

この節では、指定された非負な値及び順序統計量への縮小を論じる。次の節で、一つの応用例として、母平均に simple tree order 制約条件がある場合、isotonic regression 推定量を縮小する同時推定量を提案する。

§2.1 非負な値への縮小

$a_i \geq 0, i = 1, \cdots, p$ とし、部分集合 $\mathcal{C} = \{(x_1, \ldots, x_p) | x_i \geq a_i, i = 1, \ldots, p\}$ とそのインジケータ関数を $I_{\mathcal{C}}$ とする。a_i に縮小する推定量をつぎのように考える。

$$\hat{\lambda}_i(\mathbf{X}) = X_i - \varphi(Z_{\mathcal{C}}) \frac{(X_i - a_i)}{Z_{\mathcal{C}} + d} I_{\mathcal{C}}, \qquad i = 1, \ldots, p.$$

ここで、$Z_{\mathcal{C}} = \sum_{i=1}^{p} (X_i - a_i)$ であり、$d > 0$ である。

部分集合 $\mathcal{C}$ で (1.1) の損失関数の下で、$\mathbf{X}$ と $\hat{\lambda}(\mathbf{X}) = (\hat{\lambda}_1(\mathbf{X}), \ldots, \hat{\lambda}_p(\mathbf{X}))$ との平均損失の差を評価することで $\hat{\lambda}(\mathbf{X})$ が $\mathbf{X}$ を改良するための十分条件をつぎの定理で与える。推定量のリスクを評価するため、次の補助定理が有効である。

補助定理 $X \sim P_o(\lambda)$ とし、J を非負な整数の集合とする。$g : J \to R$ は実関数で、$g(0) = 0$ かつ $E|g(X)| < \infty$、下記の恒等式が成立する。

$$E[g(X)] = \lambda E\left[\frac{g(X+1)}{X+1}\right].$$

定理 2.1 $p \geq 2$ とする。損失関数 (1.1) の下で、$\hat{\lambda}(\mathbf{X})$ が $\mathbf{X}$ を改良するための十分条件は $\varphi(\cdot)$ は非減少関数で、$0 \leq \varphi(\cdot) \leq 2(p-1)$, $d \geq \sup \varphi(\cdot)/2$ である。

次に、ある $p \geq k \geq 2$ に対して、部分集合 $\mathcal{C}_k = \{(x_1, \ldots, x_p) | x_i \geq a_i, i = 1, \ldots, k, x_j < a_j, j = k+1, \ldots, p\}$ とする。このような $2^p - p - 1$ 個の互いに排反な部分集合のそれぞ

れで a_i に縮小するような推定量を考える。つまり、$\mathbf{X} \in \mathcal{C}_k$ のとき、

$$\hat{\lambda}_i(\mathbf{X}) = \begin{cases} X_i - \varphi_k(Z_{\mathcal{C}_k})\dfrac{(X_i - a_i)}{Z_{\mathcal{C}_k} + d_k}, & i = 1, \ldots, k, \\ X_i, & i = k+1, \ldots p, \end{cases} \tag{2.1}$$

を考える。ここで、$Z_{\mathcal{C}_k} = \sum_{i=1}^{p}(X_i - a_i)^+$ であり、$d_k > 0$ である。各部分集合で $\mathbf{X}$ と $\hat{\lambda}(\mathbf{X})$ との平均損失の差を評価することで、$\hat{\lambda}(\mathbf{X})$ が $\mathbf{X}$ を改良するための十分条件をつぎの定理で与える。

定理 2.2 損失関数 (1.1) の下で、$\hat{\lambda}(\mathbf{X})$ が $\mathbf{X}$ を改良するための十分条件は $\varphi_k(\cdot)$ は非減少関数で、$0 \leq \varphi_k(\cdot) \leq 2(k-1)$, $d_k \geq \sup \varphi_k(\cdot)/2$ である。

Remark 1: $2 \leq k \leq p$、a_i が非負な整数に対して、$\boldsymbol{X} \in \mathcal{C}_k$ の場合、Ghosh et al.(1983)、Tsui(1984,1986) は a_i に縮小する推定量

$$\tilde{\lambda}_{i_\ell}(\boldsymbol{X}) = X_i - \frac{c_k(X_i - a_i)^+}{\sum_{i=1}^{p}(X_i - a_i)^+ + k - 1}, \qquad i = 1, \ldots, p, \tag{2.2}$$

を提案した。ここで、c_k は定数で、$0 \leq c_k \leq 2(k-1)$ である (Theorem 2 of Tsui (1984).)。提案された推定量は (2.1) に含まれている（$\varphi_k(Z) = c_k$ $(0 \leq c_k \leq 2(k-1))$、$d_k = k-1$)。

§2.2 順序統計量への縮小

$p \geq 3$ とし、最小値 $X_{(1)} = min\{X_1, \ldots, X_p\}$ に縮小するような推定量を

$$\hat{\lambda}_i(\mathbf{X}) = X_i - \varphi(W)\frac{X_i - X_{(1)}}{W + d}, \qquad i = 1, \ldots, p$$

を考える。ここで、$W = \sum_{k=1}^{p}(X_k - X_{(1)})$ であり、$d > 0$ である。下記の結果が得られる。

定理 2.3 損失関数 (1.1) の下で、$\hat{\lambda}(\mathbf{X})$ が $\mathbf{X}$ を改良するための十分条件は $\varphi(\cdot)$ は非減少関数で、$0 \leq \varphi(\cdot) \leq 2(p-2)$, $d \geq \sup \varphi(\cdot)/2$ である。

この十分条件は下記のように標本空間を p 個の互いに排反な部分集合に切り分け、各集合での平均損失の差を評価することで示される。

$$\mathcal{A}_p = \{(x_1, \cdots, x_p) | x_1, x_2, \cdots, x_{p-1} \geq x_p\},$$

$$\mathcal{A}_{p-1} = \{(x_1, \cdots, x_p) | x_1, x_2, \cdots, x_{p-2} \geq x_{p-1}, x_p > x_{p-1}\},$$
$$\vdots$$
$$\mathcal{A}_l = \{(x_1, \cdots, x_p) | x_1, x_2, \cdots, x_{l-1} \geq x_l, x_{l+1}, \cdots, x_p > x_l\},$$
$$\vdots$$
$$\mathcal{A}_1 = \{(x_1, \cdots, x_p) | x_2, \cdots, x_p > x_1\}.$$

また、次のように、不偏推定量 $X_1, \ldots, X_p$ の k 番目に小さい値 $X_{(k)}$ に縮小する場合にも拡張できる。

$$\hat{\lambda}_i^{(k)}(\boldsymbol{X}) = X_i - \varphi(W)\frac{(X_i - X_{(k)})^+}{W + d}, \qquad i = 1, \ldots, p,$$

ここで、 $W = \sum_{j=1}^p (X_j - X_{(k)})^+$ であり、$d > 0$ である。次の定理が得られる。

定理 2.4 $p - k \geq 2$ とする。損失関数 (1.1) の下で、$\hat{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)}(\boldsymbol{X}) = (\hat{\lambda}_1^{(k)}(\boldsymbol{X}), \ldots, \hat{\lambda}_p^{(k)}(\boldsymbol{X}))$ が $\boldsymbol{X}$ を改良するための十分条件は $\varphi(\cdot)$ は非減少関数で、$0 \leq \varphi(\cdot) \leq 2(p-k-1)$, $d \geq \sup \varphi(\cdot)/2$ である。

Remark 2: $0 \leq c \leq 2$、$N(\boldsymbol{X}) = \#\{\ell \mid X_\ell > X_{(1)}\}$ としたとき、 Ghosh et al.(1983)、Tsui(1984,1986) は X_i を $X_{(1)}$ に縮小する推定量

$$\tilde{\lambda}_i^{(1)}(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} X_i, & \text{if } X_i \leq X_{(1)} + 1, \\ X_i - \dfrac{c\{N(\boldsymbol{X}) - 1\}^+ (X_i - 1 - X_{(1)})}{\sum_{\ell \neq i}(X_\ell - X_{(1)}) + (X_i - 1 - X_{(1)})}, & \text{if } X_i > X_{(1)} + 1, \end{cases} \tag{2.3}$$

を提案し、$\boldsymbol{X}$ を改良することを示した。しかし、提案されたは推定量は複雑であり、$X_i = X_{(1)} + 1$ のとき、縮小しないことがわかる 。また、$X_{(1)}$ について同点が起こった場合、$N(\boldsymbol{X})$ が $(p-1)$ より小さくなり、$\boldsymbol{X}$ を改良する度合が低下する恐れがある。

§2.3 補助変数を用いた順序統計量への縮小

$X_1, \ldots, X_p$ を独立に $Po(\lambda_i)$ にしたがうとする。$p \geq 3$ とする。正の値をとる補助変量 y が i 毎に観測されるものとし、これを $y_1, \ldots, y_p$ とする。λ と y とが比例関係に近い関係にある、つまり、ある $c \geq 0$ に対し

$$\lambda_i \approx c y_i, \qquad i = 1, \ldots, p$$

と想定することが不自然でないという状況を考える。例えば、観測期間 y が i 毎に異なるが単位時間当たりの平均生起回数にはそれほど大きな違いはないと考える場合、あるいは、各地域でのある事象の平均生起回数が人口の大きさに比例すると考えてよい場合、さらには、今年度の各地域での問題とする事象の平均生起回数が、昨年度の生起回数の定数倍と考えることに無理がない場合などを考えればよいだろう。

そのとき

$$Z_i = \frac{X_i}{y_i}, \qquad i = 1, \ldots, p$$

とすると、$Z_1, \ldots, Z_p$ は平均的には同じような値をとると考えるのが自然である。そこで、$Z_1, \ldots, Z_p$ の順序統計量を $Z_{(1)} \le \cdots \le Z_{(p)}$ とし、k を $p - k \ge 2$ とする。そのときつぎの推定量を考える、

$$\hat{\lambda}_i^y(\boldsymbol{X}) = X_i - \varphi(W)\frac{(X_i - y_i Z_{(k)})^+}{W + d}, \qquad i = 1, \ldots, p,$$

ここで、$W = \sum_{j=1}^p (X_j - y_j Z_{(k)})^+ = \sum_{j=1}^p y_j (Z_j - Z_{(k)})^+$.

定理 2.5 $1 \le k \le p-2$ とする。損失関数 (1.1) の下で、$\hat{\boldsymbol{\lambda}}^y(\boldsymbol{X}) = (\hat{\lambda}_1^y(\boldsymbol{X}), \ldots, \hat{\lambda}_p^y(\dot{\boldsymbol{X}}))$ は $\boldsymbol{X}$ を改良ための十分条件は $\varphi(\cdot)$ は非減少で、$0 \le \varphi(\cdot) \le 2(p-k-1), d \ge \sup \varphi(\cdot)/2$ である。

§2.4 m 個グループのポアソン母平均ベクトルの同時推定

$X_{ij} \sim Po(\lambda_{ij}), i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, p_i$ に従い、すべての X_{ij} は互いに独立とする。$\boldsymbol{X}_i = (X_{i1}, \ldots, X_{ip_i})^t, \boldsymbol{\lambda}_i = (\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{ip_i})^t,\ i = 1, \ldots, m,\ \boldsymbol{X}^t = (\boldsymbol{X}_1^t, \ldots, \boldsymbol{X}_m^t),\ \boldsymbol{\lambda}^t = (\boldsymbol{\lambda}_1^t, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_m^t)$ とする。$p_i \ge 2$ のとき、上記で記述した方法で、別々に $\boldsymbol{\lambda}_i$ を推定することができるが、この節では、Efron and Morris(1972,1973) が提案した m 個グループの正規母平均ベクトルを組み合わせした同時推定のように、m 個グループのポアソン母平均ベクトルの同時推定を考える。$\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{ip_i}$ は a_i に近い場合 (2.1) のように, 適切に、各 j に対して、$a_{ij} = a_i$ に縮小すればよい。

事前の情報により、各 i に対して、$\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{ip_i}$ は互いに近いと認識した場合、下記の推定量

$$\hat{\lambda}_{ij}^{(1)}(\boldsymbol{X}) = X_{ij} - \varphi(W)\frac{X_{ij} - X_{i(1)}}{W + d},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, p_i,$$

を考えられる。ここで、$X_{i(1)} = \min\{X_{i1}, \ldots, X_{ip_i}\}$ であり、$W = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p_i}(X_{ij} - X_{i(1)})$, $d > 0$ である。$\{\hat{\boldsymbol{\lambda}}^{(1)}(\boldsymbol{X})\}^t = [\{\hat{\boldsymbol{\lambda}}_1^{(1)}(\boldsymbol{X})\}^t, \ldots, \{\hat{\boldsymbol{\lambda}}_m^{(1)}(\boldsymbol{X})\}^t]$ 、$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_i^{(1)}(\boldsymbol{X}) = [\hat{\lambda}_{i1}^{(1)}(\boldsymbol{X}), \ldots, \hat{\lambda}_{ip_i}^{(1)}(\boldsymbol{X})]^t, i = 1, \ldots, m,$ とすると下記の定理が得られる。

定理 2.6 $m \geq 2,\ p_i \geq 2, i = 1, \ldots, m$ とする。損失関数 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p_i}(\hat{\lambda}_{ij} - \lambda_{ij})^2/\lambda_{ij}$ の下で、$\hat{\boldsymbol{\lambda}}^{(1)}(\boldsymbol{X})$ は $\boldsymbol{X}$ を改良するための十分条件は $\varphi(\cdot)$ は非減少関数で、$0 \leq \varphi(\cdot) \leq 2\left\{\sum_{i=1}^{m}(p_i - 1) - 1\right\}$, $d \geq \sup\varphi(\cdot)/2,$

§3. 応用例ー母平均に制約条件がある場合の isotonic regression 推定量の改良

本節では、母平均に制約条件がある場合の isotonic regression 推定量の改良例を示す。

例 3.1 $X_i \sim P_o(\lambda_i), i = 0, 1, \ldots, p$ に従い、母数に simple tree order 制約条件、$\lambda_0 \leq \lambda_i, i = 1, \ldots, p$ がある場合、$\boldsymbol{\lambda}$ の isotonic regression 推定量は次のような形で与えられる。

$$\hat{\lambda}_i^{st}(\mathbf{X}) = \begin{cases} X_i, & \text{for } i \in S^c \\ A_X(S), & \text{for } i \in S, \end{cases}$$

ここで、一般性を失うことなく、$S = \{0, 1, \ldots, k\}$, $S^c = \{k+1, \ldots, p\}$ であるとし、$A_X(S) = \sum_{i \in S} X_i/(k+1)$, $X_i \geq A_X(S)$, $i \in S^c$ である。$p - k \geq 2$ のとき、$\hat{\lambda}_i^{st}(\mathbf{X})$ を次のように縮小する。

$$\hat{\lambda}_i^{m}(\mathbf{X}) = \begin{cases} X_i - \varphi_{p-k}(W_{S^c})\dfrac{X_i - A_X(S)}{W_{S^c} + d_{p-k}}, & \text{for } i \in S^c \\ A_X(S), & \text{for } i \in S, \end{cases}$$

ここで、$W_{S^c} = \sum_{i=k+1}^{p}(X_i - A_X(S))$ である。そのとき、下記の結果が得られる。

定理 3.1 損失関数 (1.1) の下で、$\hat{\lambda}^m(\mathbf{X})$ が $\hat{\lambda}^{st}(\mathbf{X})$ を改良するための十分条件は $\varphi_{p-k}(\cdot)$ は非減少関数で,$d_{p-k} \geq \sup\varphi_{p-k}(\cdot)/2$ である。

また、母数に次のような制約条件が与えられる場合にも応用できる。

例 3.2 図 1 に示されるように、母数に下記のような制約条件

$$\lambda_1 \leq \lambda_3, \quad \lambda_3 \leq \lambda_4, \quad \lambda_3 \leq \lambda_5, \quad \lambda_2 \leq \lambda_5$$

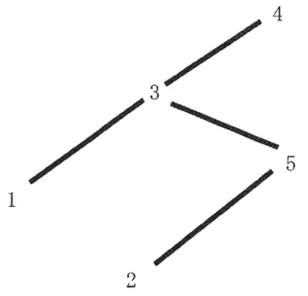

図 1

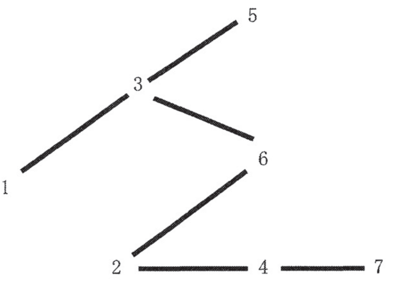

図 2

が与えられるとする。λ_i の isotonic regression 推定量を $X_i^*, i = 1, \ldots, 5$ とすると $X_4^* = X_4$、$X_5^* = X_5$ になるための必要十分条件は $X_4 \geq X_3^*$、$X_5 \geq \max(X_2^*, X_3^*)$ である。この場合に限って、(X_4, X_5) を $(X_3^*, \max(X_2^*, X_3^*))$ に縮小する。

例 3.3 図 2 に示されるように、母数に下記のような制約条件

$$\lambda_1 \leq \lambda_3, \quad \lambda_3 \leq \lambda_5, \quad \lambda_3 \leq \lambda_6, \quad \lambda_2 \leq \lambda_4, \quad \lambda_2 \leq \lambda_6, \quad \lambda_4 \leq \lambda_7$$

が与えられるとし、λ_i の isotonic regression 推定量を $X_i^*, i = 1, \ldots, 7$ とする。よって、$X_5^* = X_5$, $X_6^* = X_6$ かつ $X_7^* = X_7$, の場合 (X_5, X_6, X_7) を $(X_3^*, \max(X_2^*, X_3^*), X_4^*)$ へ縮小する。$X_5^* = X_5$, $X_6^* = X_6$ かつ $X_7^* > X_7$ の場合。(X_5, X_6) を $(X_3^*, \max(X_2^*, X_3^*))$ に縮小する。同様に、$(X_5^* = X_5$, $X_6^* > X_6$, $X_7^* = X_7)$ と $(X_5^* > X_5$, $X_6^* = X_6$, $X_7^* = X_7)$ との場合も考えられる。

§4. multiplicative Poisson models での母平均の同時推定問題への応用

本節では、multiplicative Poisson models での母平均の同時推定問題を考え、最尤推定量を順序統計量に縮小する推定量を提案する。

multiplicative Poisson models $X_{i_1 i_2 \ldots i_J} \sim P_o(\lambda_{i_1 i_2 \ldots i_J})$ は下記のように表現される。$\lambda = \sum \lambda_{i_1 i_2 \ldots i_J}$ とするとき、$\lambda_{i_1 i_2 \ldots i_J}$ は次のように表現されるものとする。

$$\lambda_{i_1 i_2 \ldots i_J} = \lambda \alpha_{1 i_1} \alpha_{2 i_2} \ldots \alpha_{J i_J}, i_j = 1, \ldots, I_j, j = 1, \ldots, J,$$

ここで、

$$\alpha_{ji_j} > 0, \ \sum_{i_j=1}^{I_j} \alpha_{ji_j} = 1, \qquad j = 1, \dots J.$$

である。また、k-th layout の周辺度数と総度数を

$$X^+_{k,i_k} = \sum_{i_s : s \neq k} X_{i_1 i_2 \dots i_J}, \qquad X^+ = \sum_{i_k=1}^{I_k} X^+_{k,i_k}$$

とする。Hara & Takemura (2006) は $\boldsymbol{\lambda}= \{\lambda_{i_1 i_2 \dots i_J}\}$ の最尤推定量

$$\hat{\lambda}^{MLE}_{i_1 i_2 \dots i_J} = \begin{cases} \dfrac{\prod_j X^+_{j,i_j}}{(X^+)^{J-1}}, & \text{if} \quad X^+ \neq 0 \\ 0, & \text{if} \quad X^+ = 0 \end{cases}$$

を導出し、一様最小分散不偏推定量 (UMVUE) であることを示した。さらに標準化 2 乗損失関数

$$L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{j=1}^{J} \sum_{i_j=1}^{I_j} \frac{1}{\lambda_{i_1 i_2 \dots i_J}} (\delta_{i_1 i_2 \dots i_J} - \lambda_{i_1 i_2 \dots i_J})^2 \tag{4.1}$$

を基準としたとき、最尤推定量を原点に縮小する Clevension-Zidek タイプ推定量を提案し、改良とのなる条件を示した。

§4.1 最小値への縮小

ここでは最尤推定量を順序統計量に縮小するような推定量を考える。$k(1 \leq k \leq J)$ を固定し、k-th layout の周辺度数のベクトル $\mathbf{X}^+_k = (X^+_{k,1}, \dots, X^+_{k,I_k})'$ とする。$\{X^+_{k,i_k}, i_k = 1, \dots, I_k\}$ の最小値 $X^+_{k,(1)} \equiv \min\{X^+_{k,1}, \dots, X^+_{k,I_k}\}$ への縮小推定量, $\tilde{\lambda}^k = \{\tilde{\lambda}^k_{i_1 i_2 \dots i_J}\}$,

$$\tilde{\lambda}^k_{i_1 i_2 \dots i_J} = \frac{\prod_{j=1, j \neq k}^{J} X^+_{j,i_j}}{(X^+)^{J-1}} \left\{ X^+_{k,i_k} - \varphi_k(W_k) \frac{(X^+_{k,i_k} - X^+_{k,(1)})}{W_k + d_k} \right\}$$

を考える。ここで、

$$W_k = \sum_{i_k=1}^{I_k} (X^+_{k,i_k} - X^+_{k,(1)})$$

である。以下の定理が得られる。

定理 4.1 $I_k \geq 3$ とする。損失関数 (4.1) の下で $\tilde{\lambda}^k$ が最尤推定量 $\hat{\lambda}^{MLE}$ を改良するための十分条件は $\varphi_k(\cdot) \geq 0$ は非減少関数で

$$0 \leq \varphi_k(\cdot) \leq 2(I_k - 2), \quad d_k \geq \sup \frac{\varphi_k(\cdot)}{2}.$$

である。

§4.2 縮小推定量の凸結合 (Convex Combination)

次に、縮小推定量の凸結合 (convex combination) を考える。損失関数が凸関数であるので、下記の凸結合縮小推定量も最尤推定量を改良することがわかる。

$0 \leq \omega_k \leq 1$ とし $\sum_{k=1}^{J} \omega_k = 1$ とすると

$$\sum_{k=1}^{J} \omega_k \tilde{\lambda}^k_{i_1 i_2 \ldots i_J} = \frac{\prod_{j=1}^{J} X^+_{j,i_j}}{(X^+)^{J-1}} - \sum_{k=1}^{J} \omega_k \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{J} X^+_{j,i_j}}{(X^+)^{J-1}} \left(\varphi_k(W_k) \frac{(X^+_{k,i_k} - X^+_{k,(1)})}{W_k + d_k} \right)$$

が MLE を改良する。ここで、$\varphi_k(W_k)$ と d_k の条件は定理 4.1 と同じである。

§4.2 重縮小推定量

$I \times J$ Multi4plicative Poission models に対して $\{\lambda_{ij}\}$ の MLE

$$\hat{\lambda}^{MLE}_{ij} = \frac{X_{i+} X_{+j}}{X_{++}}$$

を改良する 2 重縮小推定量が次のように考えられる。

$b_1, \ldots, b_I \geq 0$ とし $c_1, \ldots, c_J \geq 0$ とする。

$$\hat{\lambda}^{DS}_{ij} = \frac{X_{i+} X_{+j}}{X_{++}} - \psi(N, W) \left(\frac{X_{i+}(X_{+j} - c_j)^+}{2X_{++}(W + d_N)} + \frac{X_{+j}(X_{i+} - b_i)^+}{2X_{++}(W + d_N)} \right)$$

ここで、

$$W = \left(\sum_{i=1}^{I} (X_{i+} - b_i)^+ + \sum_{j=1}^{J} (X_{+j} - c_j)^+ \right) / 2,$$

$$N = \sharp\{i | X_{i+} \geq b_i\} + \sharp\{j | X_{+j} \geq c_j\},$$

である。次の定理が得られる。

定理 4.2 $N \geq 3$（$N = 1, 2$ のとき、$\psi \equiv 0$ とする。）とし、損失関数 (4.1) の下で、$\{\hat{\lambda}_{ij}^{DS}\}$ が $\{\hat{\lambda}_{ij}^{MLE}\}$ を改良するための十分条件は $\psi(N, W)$ は N 及び W の非減少関数で、$0 \leq \psi(N, W) \leq (N-2)$ で、

$$\psi(N+1, W)/\psi(N, W) \leq 2, \quad d_N \geq \sup_w \psi(N, w)/2$$

である。

参考文献

[1] Amirdjanova, A. and Woodroofe, M. (2004). Shrinkage estimation for convex polyhedral cones. *Statist. Probab. Letters*, 70, 87-94.

[2] Barlow, R. E., Bartholomew, D. J., Bremner, J. M. and Brunk, H. D. (1972). *Statistical Inference under Order Restrictions: The Theory and Application of Isotonic Regression*. Wiley, New York.

[3] Chang, Y.-T. (1981). Stein-type estimators for parameters restricted by linear inequalities. *Keio Sci. Tech. Rep.*, 34, 83-95.

[4] Chang, Y.-T. (1982). Stein-type estimators of parameters in truncated spaces. *Keio Sci. Tech. Rep.*, 35, 185-193.

[5] Chang, Y.-T. and Shinozaki, N. (2006). Estimation of ordered means of two Poisson distributions. *Comm. Statist.-Theory and Methods-*, 35, 1993-2003.

[6] Chang, Y.-T. and Shinozaki, N. (2018). New types of shrinkage estimators of Poisson means under the normalized squared error loss. *Comm. Statist.-Theory and Methods-* published online.
http://www.tandfonline.com/eprint/qGIvwAG8tCf7kWhHidWE/full

[7] Chou, J. P. (1991). Simultaneous estimation in discrete multivariate exponential families. *Ann. Statist.*, 19, 314-328.

[8] Clevenson, M. and Zidek, J. (1975). Simultaneous estimation of the means of independent Poisson laws. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 70, 698-705.

[9] Efron, B. and Morris, C. (1972). Empirical Bayes on vector observations: An extension of Stein's method. *Biometrika*, 59, 335-347.

[10] Efron, B. and Morris, C. (1973). Combining possibly related estimation problems. *J. Royal Statist. Soc.*, B, 35, 379-421.

[11] Ghosh, M. and Yang, M. C. (1988). Simultaneous estimation of Poisson means under entropy loss. *Ann. Statist.*, 16, 278-291.

[12] Ghosh, M., Hwang, J. T. and Tsui, K. W. (1983). Construction of improved estimators in multiparameter estimation for discrete exponential families. *Ann. Statist.*, 11, 351-367.

[13] Hwang, J. T. (1982). Improving upon standard estimators in discrete exponential families with applications to Poisson and negative binomial cases. *Ann. Statist.*, 10, 857-867.

[14] Kuriki, S. and Takemura, A. (2000). Shrinkage estimation towards a closed convex set with a smooth boundary. *J. Multivariate Analysis*, 75, 79-111.

[15] Peng, J. C. M. (1975). Simultaneous estimation of the parameters of independent Poisson distributions. Technical Reports 78. Department of Statistics, Stanford University.

[16] Robertson, T., Wright, F. T. and Dykstra, R. L. (1988). *Order Restricted Statistical Inference.* Wiley, New York.

[17] Sengupta, D. and Sen, P. K. (1991). Shrinkage estimation in a restricted parameter space, *Sankhya*, A 53, 389-411.

[18] Tsui, K. W. (1984). Robustness of Clevenson-Zidek-type estimators. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 79, 152-157.

[19] Tsui, K. W. (1986). Further developments on the robustness of Clevenson-Zidek-type means estimators. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 81, 176-180.

[20] Tsui, K. W. and Press, S. J. (1982). Simultaneous estimation of several Poisson parameters under k-normalized squared error loss. *Ann. Statist.*, 10, 93-100.

[21] Tsukuma, H. (2009). Shrinkage estimation in elliptically contoured distribution with restricted parameter space. *Statistics & Decisions*, 27, 25-35.

謝辞

筆者は京都大学数理解析研究所（当研究所により研究旅費助成を受けています）及びRIMS 共同研究研究代表者筑波大学数理物質系数学域小池健一先生に感謝の意を表します。